التحميل منتديات توجيه نت www.tawjihnet.net المصدر: وزارة التربية الوطنية

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⴳ ⴰⵣⵣⴰⵢⵔⴰⵏ

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2014
الموضوع

NS 24

المادة	**الرياضيات**	**مدة الإنجاز**	**4**
الشعبة أو المسلك	**شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)**	**المعامل**	**9**

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالحسابيات............................(3ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالبنيات الجبرية......................(3.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية......................(3.5ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.............................(8ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل ....(2ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول:(3 نقط)

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع: $a_n = \underbrace{333......3}_{n \text{ مرة}}1$ (n مرة الرقم 3)

0.5 1- تحقق أن العددين a_1 و a_2 أوليان.

0.5 2- بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $3a_n + 7 = 10^{n+1}$

0.75 3- بين أن لكل k من $\mathbb{N}$: $10^{30k+2} \equiv 7 \; [31]$

0.75 4- بين أن لكل k من $\mathbb{N}$: $3a_{30k+1} \equiv 0 \; [31]$ ، ثم استنتج أن 31 يقسم a_{30k+1}

0.5 5- بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$، إذا كان $n \equiv 1 \; [30]$ فإن المعادلة $a_n x + 31y = 1$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

التمرين الثاني:(3.5 نقطة)

نذكر أن $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي و أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية صفرها $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

و وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

لكل a و b من $\mathbb{R}$ ، نضع: $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$ ونعتبر المجموعة : $E = \{ M(a,b) / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \}$

0.5 1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}),+)$.

0.75 2- احسب $J^2 = J \times J$ حيث: $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ثم استنتج أن E جزء غير مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

3- نعرف على $M_2(\mathbb{R})$ قانون التركيب الداخلي $*$ بما يلي : $A * B = A \times N \times B$ حيث : $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ونعتبر التطبيق φ من $\mathbb{C}^*$ نحو $M_2(\mathbb{R})$ الذي يربط كل عدد عقدي غير منعدم $a+ib$ (a و b عددان حقيقيان) بالمصفوفة $M(a,b)$.

0.5 أ) بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(M_2(\mathbb{R}),*)$

0.25 ب) نضع: $E^* = E - \{O\}$. بين أن: $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$

0.5 ج) بين أن $(E^*,*)$ زمرة تبادلية.

0.5 4- بين أن: $A*(B+C) = A*B + A*C \quad (\forall (A,B,C) \in E^3)$

0.5 5- استنتج مما سبق أن $(E,+,*)$ جسم تبادلي.

التمرين الثالث: (3.5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

ليكن θ عددا حقيقيا بحيث: $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] - \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

1- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $(E) \quad z^2-\sqrt{2}e^{i\theta}z+e^{2i\theta}=0$

أ)تحقق أن مميز المعادلة (E) هو: $\Delta = \left(\sqrt{2}ie^{i\theta}\right)^2$ 0.25

ب) اكتب على الشكل المثلثي z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) في المجموعة $\mathbb{C}$. 0.75

2- نعتبر النقط I و J و T_1 و T_2 و A التي ألحاقها على التوالي 1 و -1 و $e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$ و $e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$ و $\sqrt{2}e^{i\theta}$

أ) بين أن المستقيمين (OA) و (T_1T_2) متعامدان . 0.5

ب)ليكن K منتصف القطعة $[T_1T_2]$. بين أن النقط O و K و A مستقيمية. 0.25

ج)استنتج أن المستقيم (OA) هو واسط القطعة $[T_1T_2]$. 0.25

3- ليكن r الدوران الذي مركزه T_1 و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ)اعط الصيغة العقدية للدوران r. 0.25

ب)تحقق أن لحق النقطة B صورة النقطة I بالدوران r هو: $b=\sqrt{2}e^{i\theta}+i$ 0.5

ج)بين أن المستقيمين (IJ) و (AB) متعامدان . 0.25

4- حدد لحق النقطة C صورة النقطة A بالإزاحة التي متجهتها $\left(-\vec{v}\right)$ 0.25

5- بين أن النقطة A هي منتصف القطعة $[BC]$. 0.25

التمرين الرابع: (8 نقط)

I - نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{-x\ln x}{1+x^2} \; ; \; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1- أ)بين أن الدالة f متصلة على المجال $[0,+\infty[$ 0.5

ب)أدرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0,+\infty[$ 0.25

2- أ)بين أن: $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x) \quad \left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)$ 0.25

ب) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ 0.25

المصدر: وزارة التربية الوطنية www.tawjihnet.net التحميل منتديات توجيه نت

ج) بين أن: $f'(\alpha)=0 \quad (\exists \alpha\in]0,1[)$ 0.5

د) استنتج أن: $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$ 0.5

II - نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي: $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم.

1- أ) تحقق أن: $\frac{1}{2}\le\frac{t^2}{1+t^2}\le 1 \quad (\forall t\in[1,+\infty[)$ 0.5

ب) بين أن: $F(1)-\frac{1}{2}(\ln x)^2\le F(x)\le F(1)-\frac{1}{4}(\ln x)^2 \quad (\forall x\in[1,+\infty[)$ 1

(لاحظ أن: $F(x)=\int_0^1 f(t)\,dt-\int_1^x\frac{t^2}{1+t^2}\cdot\frac{\ln t}{t}\,dt$)

ج) أحسب $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها. 1

2- أ) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$ ثم أحسب $F'(x)$ 0.5

ب) أدرس تغيرات الدالة F على المجال $[0,+\infty[$ 0.25

III -1- أ) بين أن : $-t\ln t\le\frac{1}{e} \quad (\forall t\in]0,+\infty[)$ 0.5

ب) بين أن : $f(t)\le\frac{1}{e} \quad (\forall t\in[0,+\infty[)$ 0.25

ج) استنتج أن: $F(x)<x \quad (\forall x\in]0,+\infty[)$ 0.25

2- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0\in]0,1[$ و $u_{n+1}=F(u_n) \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

أ) بين أن: $u_n\in]0,1[\quad (\forall n\in\mathbb{N})$ 0.5

ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة . 0.5

ج) حدد $\lim_{n\to+\infty}u_n$ 0.5

التمرين الخامس:(2 نقط)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \; ; \; x>0 \\ g(0)=0 \end{cases}$$

0.5 — 1- بين أن الدالة g متصلة على المجال $[0,+\infty[$

2- لكل عدد حقيقي x من المجال $[0,+\infty[$ ، نضع $L(x)=\int_x^1 g(t)dt$

0.25 — أ)بين أن الدالة L متصلة على المجال $[0,+\infty[$

0.25 — ب)أحسب $L(x)$ من أجل $x>0$

0.5 — ج)أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} L(x)$ ثم استنتج قيمة $L(0)$

3- لكل عدد صحيح طبيعي n أكبر من أو يساوي 1 نضع: $s_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{p=n-1} g\left(\dfrac{p}{n}\right)$.

0.5 — بين أن المتتالية $(s_n)_{n\geq 1}$ متقاربة ثم حدد نهايتها.

انتهى